

Untersuchungen zum Korpuskelstoß bei Energien von 6 bis 30 keV

Von RUDOLF HÖLZ *

Aus dem Physikalischen Institut der Universität Gießen **

(Z. Naturforsch. 15 a, 211—219 [1960]; eingegangen am 16. Februar 1960)

Zur Untersuchung der beim Ionenstoß übertragenen Bewegungsenergie wurde im genannten Energiebereich die Reichweite von Wasserstoff-, Helium- und Neonionen in leichtem und schwerem Wasserstoff (über die differentielle Ionisation der Gase) gemessen. Sie ist bei den *niedrigeren Energien* dieses Bereiches für *alle Geschoßmassen* in Deuterium geringfügig größer — die übertragene kinetische Energie demnach kleiner — als in leichtem Wasserstoff. Mit zunehmenden *Geschoßgeschwindigkeiten* kehrten sich diese Verhältnisse für die schweren Ionen um, was durch die Winkelstreuung erklärt wird.

Die Übereinstimmung mit der Theorie ist zufriedenstellend: Größenordnung und Massenabhängigkeit der übertragenen Bewegungsenergie entsprechen der von BOHR (1948) angegebenen Vorstellung, daß die elastische Wechselwirkung auf der elektrostatischen Abstoßung der sich in diesem Energiebereich relativ schwach durchdringenden Stoßpartner beruht. Dabei ist der übertragene Impuls abhängig von der *Ordnungszahl*, aber in erster Näherung unabhängig von der *Masse* der Stoßpartner; daraus folgt die — experimentell bestätigte — Massenabhängigkeit der vom Teilchen abgegebenen Energie: die Bremsung ist im schweren Gas kleiner als im leichten.

Beim Teilchenstoß unterscheidet man gewöhnlich zwischen dem „unelastischen Stoß“ (Anregung und Ionisation der Teilchen) und dem hier interessierenden „elastischen Stoß“, d. h., der Wechselwirkung mit dem *Gesamtatom*, an das ein Teil der Stoßenergie als *Bewegungsenergie* übertragen wird. Von den *elastischen* Stoßprozessen sind seit langem bei niedrigen Energien der aus der Gaskinetik geläufige „hard-sphere“-Stoß kompakter neutraler Teilchen („harte Kugeln“) bekannt und bei hohen Energien der RUTHERFORD-Stoß, der auf der elektrostatischen Abstoßung der Kerne der sich dabei praktisch völlig durchdringenden Atome beruht. Weniger erforscht ist das Zwischengebiet. Hier überwiegen die unelastischen Stöße die elastischen, solange die Relativgeschwindigkeit der Stoßteilchen $v > v_0 = c/137$ ist. In diesem mittleren Energiebereich tauchen nach der von BOHR 1948 angegebenen Theorie¹ die Atomhüllen der Stoßpartner weniger tief ineinander, so daß die Kernladungen zunehmend abgeschirmt und die Wechselwirkungskräfte entsprechend kleiner werden.

Diese Theorie wurde bezüglich der *Massenabhängigkeit* der „elastischen Bremsung“^{2—4} (Geschosse waren Kernspaltprodukte) zunächst scheinbar nicht bestätigt (s. Abschn. 3). Neuere Messungen⁵ zeigten aber, daß die *Winkelverteilung* der Streuteilchen im Einklang steht mit der Annahme einer „exponentiellen Abschirmung“

beim RUTHERFORD-Stoß. Eine Schwierigkeit in diesem Energiebereich bietet noch die *Geschwindigkeitsabhängigkeit* der Energieübertragung $dE/dR \sim v^\delta$. Der Exponent δ liegt im Falle des unelastischen Stoßes bei -1 bis -1.4 ; beim elastischen Stoß geht er mit abnehmender Stoßenergie theoretisch von -2 über 0 nach $+2$ im Falle des Stoßes harter Kugeln, während sich zwischen etwa 50 und 5 keV *empirisch* $\delta \approx +\frac{2}{3}$ ergibt.

In der vorliegenden Arbeit interessiert der Teilchenstoß in dem genannten Zwischengebiet zunehmender Abschirmung, in dem das Modell harter Kugeln (kleine Energien) versagt, aber auch die Vorstellung der „unabgeschirmten Kerne“ (große Energien) den Stoßprozeß nicht zutreffend beschreibt. Eine Übertragung *kinetischer* Energie ließ hier eine *unterschiedliche* Teilchenbremsung (Ionisierung, Reichweite) in Wasserstoff bzw. Deuterium erwarten. Die Übertragung von Bewegungsenergie wurde vor längerer Zeit bereits mit einfachen Meßanordnungen untersucht^{6, 7}. Man erwartete damals eine elastische Wechselwirkung harter Kugeln. Allerdings hatte vorher bereits WIEN (siehe Anm. 6) bei der Messung der Geschwindigkeit der gestoßenen und dabei angeregten Atome über den DOPPLER-Effekt gefunden, daß der im hier interessierenden Bereich übertragene Impuls um Größenordnungen kleiner ist als nach diesem Modell. KOOPS⁶ und MEYER⁷ stellten neben

³ I. K. BOGGILD, O. H. ARROE u. T. SIGURGEIRSSON, Phys. Rev. **71**, 281 [1947].

⁴ T. N. HATFIELD, A. E. LOCKENVITZ u. J. M. YOUNG, J. Frankl. Inst. **250**, 309 [1950].

⁵ E. N. FULS, P. R. JONES, F. P. ZIEMBA u. E. EVERHARDT, Phys. Rev. **107**, 704 [1954].

⁶ R. KOOPS, Ann. Phys., Lpz. **33**, 57 [1938].

⁷ H. MEYER (veröff. v. Joos), Ann. Phys., Lpz. **41**, 426 [1942].

* Jetzt bei Kalle & Co., Wiesbaden-Biebrich.

** Auszug aus D 26.

¹ N. BOHR, Kgl. Danske Vid. Selsk., Mat. Fys. Medd. **18**, 8 [1948].

² N. O. LASSEN, Kgl. Danske Vid. Selsk., Mat. Fys. Medd. **25**, 11 [1949].



einer Bestätigung dieses Ergebnisses auch eine *grund-sätzliche* Diskrepanz zur damaligen Vorstellung fest: die gefundene Massenabhängigkeit widerspricht der Theorie des Stoßes harter Kugeln. — Die vorliegende Arbeit schließt an vorhergehende^{6, 7} an.

1. Meßanordnung

In den genannten früheren Arbeiten wurden die durch magnetische Zerlegung eines Kanalstrahls erhaltenen Ionen konstanten Impulses durch eine Zelluloidfolie hindurch in eine Meßkammer (einige Torr) geschossen. Der Strahl war dabei weitgehend inhomogen; mehrere Ionenarten (wenn auch mit der Einschränkung $m v/e = \text{const}$ für alle Teilchen) gelangten in den Meßraum. Dabei wurden die Ionen außerdem noch in der Folie in wenig übersehbarer Weise gebremst und konnten Sekundärteilchen auslösen. Weiterhin blieb offen, wieweit die verursachte Ionisation von der Meßkammer erfaßt wurde. Wenn auch die genannten Verfasser lediglich Vergleichsmessungen anstrebten, so waren doch die unübersichtlichen Verhältnisse unbefriedigend. In der vorliegenden Arbeit wurden daher

1. die Ionenerzeugung von der Ionenbeschleunigung getrennt,
2. der Ionenstrahl nach e/m und v homogenisiert und
3. an Stelle eines Folienverschlusses der Meßkammer zwei dynamische Druckstufen zur Erzeugung des Druckgefäßes vor der Meßkammer benutzt.

Wegen der durch Netzschwankungen (trotz Stabilisierung) hervorgerufenen Schwankungen der scharfen „ionenoptischen Linien“ war nunmehr eine „Dosierung“ des Strahles wie in anderen Arbeiten^{6, 7} ausgeschlossen und damit eine Vergleichsmessung der Gesamtionisation (oder -anregung) nicht möglich. Deshalb wurde die Reichweite der Ionen aus Relativmessungen der Ionisationsanteile auf den einzelnen Wegabschnitten („differentielle Ionisation“) bestimmt.

Die Ionenstrahlapparatur wurde bereits an anderer Stelle beschrieben⁸. Der Meßteil der Apparatur bestand aus einer längs unterteilten Ionisationskammer. 6 Platten, die direkt oder über ein Galvanometer geerdet waren, standen einer durchgehenden, auf +60 Volt liegenden Platte gegenüber. Jede der vier mittleren Platten erfaßte zwei Zentimeter des vom Strahl durchlaufenen Weges. (Durch die zwei Platten am Anfang und am Ende wurde das elektrische Feld der eigentlichen Meßstrecke homogen gehalten.) Plattenbreite und -abstand betrugen 2 cm, der Kammerdurchmesser war wesentlich größer (7 cm), um Feldverzerrungen zu vermeiden, die bei der

elektrischen Unsymmetrie des Meßteiles zu befürchten waren.

Der Druck in der Ionisationskammer wurde mit einem „Alphatron“ gemessen. Der Relativfehler der Druckmessung in H_2 und D_2 lag bei wenigen Prozent, während der Druck absolut nur bis auf rund zehn Prozent genau bestimmt wurde.

2. Messung

2.1. Ausführung und Auswertung der Messung

Das Ziel der Messungen war es, aus den Kurven $i(r)$ der differentiellen Ionisation i längs des Weges r (BRAGGSche Kurven) die Reichweite als Funktion der Einschußenergie der Teilchen zu bestimmen. Bei jeder Einzelmessung wurden zur jeweils gewünschten Ionensorte⁹ und -energie nacheinander die Ionisationswerte an den Einzelplatten, den beiden ersten, den beiden letzten Platten und (zu Beginn und am Schluß) allen Platten gemessen¹¹. Dadurch war eine leichte Kontrolle möglich: wenn die Einzel- bzw. Summenwerte nicht übereinstimmten, wurde die Messung verworfen.

Das Ergebnis ist eine zur BRAGG-Kurve flächen-gleiche Treppenfunktion. Auf diese Weise wurden für jede Ionensorte etwa 20 BRAGG-Kurven (zu 20 verschiedenen Werten der Einschußenergie) für Wasserstoff und Deuterium durchgemessen und anschließend nach einer Normierung untereinander ausgeglichen, um geringfügige Abweichungen, die durch einen zeitlichen Gang in der Apparatur (z. B. des Druckmessers) bedingt waren, zu eliminieren (aus diesem Grund waren auch die Energiewerte bei der Messung nicht einsinnig durchlaufen worden).

Die aus den Kurven $i(r)$ gewonnenen mittleren Reichweiten sind in Abb. 1 als Funktion der jeweiligen Einschußgeschwindigkeit aufgetragen.

2.2. Meßergebnisse

Die wichtigsten Meßergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

1. Die Reichweiten in Wasserstoff und Deuterium sind verschieden, aber die Unterschiede sind relativ klein.

und negativ) ionisiert ist¹⁰, wie Messungen mit einem Aufänger bestätigten.

¹⁰ S. K. ALLISON, Rev. Mod. Phys. **30**, 1157 [1958].

¹¹ Mit besonderer Aufmerksamkeit wurde kontrolliert, ob nicht Anteile des Primärstrahles auf die Meßplatten aufließen und so die Ergebnisse verfälschten. Diese Messungen zeigten keinen mit dem Galvanometer feststellbaren Primärstromanteil.

⁸ R. HÖLZ u. H. LÖB, Z. Naturforsch. **13a**, 602 [1958].

⁹ Die hier häufig gebrauchte Bezeichnung „Ionen“ für die stoßenden Teilchen ist historisch bedingt. Tatsächlich ist trotz eines ständigen Fluktuierens des Ladungszustandes⁵ bereits nach dem Durchqueren einer sehr kurzen Strecke ($\approx 0,1$ Torr cm) ein Ladungsgleichgewicht erreicht, bei dem nur noch ein kleiner Prozentsatz der Teilchen (positiv

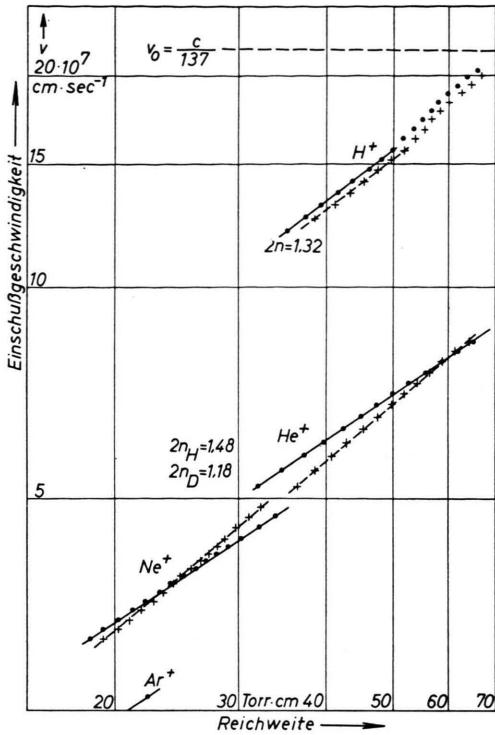


Abb. 1. Experimentell gefundener Zusammenhang zwischen Einschusgeschwindigkeit und Reichweite der Teilchen. (Jeder Wert ist aus einer BRAGG-Kurve gewonnen.)
Punkte: H_2 , Kreuze: D_2 .

2. Bei geringen Einschusenergien ist für alle Geschossmassen die Reichweite in Deuterium größer. Beides steht im Einklang mit den Versuchsergebnissen von WIEN, KOOPS und MEYER, aber im Widerspruch zu den dort angegebenen Theorien.

- Der gemessene Reichweitenunterschied wird bei Beschuß durch Helium- und Neonionen nach höheren Energien hin kleiner und schlägt schließlich sogar um.
- Bei Beschuß durch Wasserstoffteilchen tritt dieses Umschlagen des Reichweitenunterschiedes nicht auf.
- Bei gleicher Energie sind die Reichweiten für H^+ in H_2 um einen annähernd konstanten Faktor größer als in D_2 (in Analogie zu den von KOOPS gemessenen Kurven der Gesamtionisation bei den gleichen Stoßpartnern).

2.3. Diskussion der Meßergebnisse; Empirie der Energie-Reichweite-Beziehungen

Die gefundenen Zusammenhänge zwischen der mittleren Reichweite und der Energie bzw. Geschwindigkeit (Abb. 1) lassen sich recht gut durch ein Potenzgesetz wiedergeben, wie es bereits COOK, JONES und JORGENSEN¹² für die extrapolierte Reichweite bei Protonen- und α -Teilchen-Beschuß verschiedener Gase fanden: Unterhalb einer Grenzenergie E_0 (Größenordnung 50 keV) ist

$$R = k \cdot E^n \quad \text{oder} \quad R = c \cdot v^{2n} \quad \text{mit} \quad \frac{c}{k} = \left(\frac{m_1}{2} \right)^n \quad (1)$$

(s. Anm.¹³).

Demgemäß kann man die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit in Tab. 1 einordnen.

Für den Beschuß mit Helium- und Neonionen ist n gleich für Wasserstoff einerseits und Deuterium andererseits ($n_H = 0,74$; $n_D = 0,59$), wie sich aus den jeweils gleichen Steigungen der zugehörigen Geraden

gestoßenes Teilchen	n		$\frac{1-n}{n}$		$k \left[\frac{\text{Torr} \cdot \text{cm}}{(\text{keV})^n} \right]$		$c \left[\frac{\text{Torr} \cdot \text{cm}}{10^7 (\text{cm/sec})^{2n}} \right]$	
	H_2	D_2	H_2	D_2	H_2	D_2	H_2	D_2
H^+ (kl. E-Werte)	0,66 ¹⁴	0,66	0,52	0,52	8,96	9,3	1,28	1,33
He^+	0,74	0,59	0,35	0,7	8,82	12,82	2,76	5,1
Ne^+	0,74	0,59	0,35	0,7	3,25	4,86	3,34	4,98

Tab. 1.

¹² C. J. COOK, E. JONES u. I. JORGENSEN, Phys. Rev. 91, 1417 [1953].

¹³ Im folgenden werden die nachstehenden Symbole und Abkürzungen benutzt: Stoßendes Teilchen: Index 1; Streuwinkel α . Gestoßenes Teilchen: Index 2; Driftwinkel β . z^* (effektive) Kernladungszahl, μ Elektronenmasse, m Teilchenmasse, R Reichweite, s Bahnlänge, v (') Geschwin-

digkeit vor (nach) dem Stoß, $\mathfrak{P}(\cdot)$ Impuls vor (nach) dem Stoß, T kinetische Energie, ε zur Anregung, Ionisation, Rotation, Schwingung, Dissoziation umgesetzter Energieanteil, N Bremsteilchenzahl.

¹⁴ In diesem Fall ist ein Vergleich mit ¹² möglich. Die Übereinstimmung (0,67) ist sehr gut.

in der logarithmischen Darstellung $v(R)$ in Abb. 1 ergibt. Dies dürfte nach den untenstehenden Betrachtungen als Regelfall anzusehen sein. Daß dagegen bei Beschuß mit Wasserstoffionen n in H_2 und D_2 gleich ist, mag damit zusammenhängen, daß hier der untersuchte Energiebereich in der Nähe der durch v_0 gegebenen Grenzenergie liegt.

Die im Experiment gefundene Reichweite kann jedoch zur Untersuchung des Stoßablaufes nicht unmittelbar herangezogen werden, da sie – gerade im Falle der Impulsübertragung – durch die Ablenkung der Geschosse von ihren Einschußbahnen verfälscht wird: durch den (bei jeder Wechselwirkung erneut möglichen) Rückstoß wird mit zunehmender Stoßzahl die Bahn stärker „zerknittert“. Die Reichweite (die Projektion der Bahn auf die Einschußgerade) ist dadurch kleiner als die Länge der vom Geschoß tatsächlich durchlaufenen Bahn $s = \Sigma (\Delta s)$. Wegen dieser „Reichweitenverkürzung“ verlaufen die empirisch gefundenen Kurven $E(R)$ steiler als die hier eigentlich interessierende Funktion $E(s)$.

Dieser Einfluß der Winkelstreuung wird einerseits größer mit zunehmender *Anfangs*- (Einschuß-)Energie¹⁵ und – (wegen des bei niederen Energien relativ hohen Energieumsatzes) – mit längs der Bahn abnehmender *Teilchenenergie*; andererseits ist die Reichweitenverkürzung natürlich bei dem Isotop mit dem größeren Streuwinkel größer.

Damit läßt sich der steilere Verlauf der Kurven $E(R)$ bei den Edelgasionen in D_2 , das kleinere n also, als Folge der hier größeren Winkelstreuung deuten.

Im folgenden soll versucht werden, den störenden Einfluß der Winkelstreuung näherungsweise zu eliminieren.

Der *empirisch gefundene differentielle Energieverlust*

$$\frac{dE}{dR} = \frac{1}{n k^{1/n}} R^{(1-n)/n} = \frac{m_1}{2 n c} v^{2(1-n)} = \frac{E^{1-n}}{n k} \quad (2)$$

ist im Funktionsverlauf bei Wasserstoff bzw. Deuterium als Bremssubstanz verschieden, aber für Helium und Neon als Geschosse jeweils bis auf einen Faktor *gleich*: $dE/dR \sim R^{0.35}$ in H_2 bzw. $R^{0.7}$ in D_2 (Abb. 2).

¹⁵ Aus diesem Grund ist die Aussagekraft der bei Verwendung abgebremster energiereicher Teilchen erhaltenen Meßergebnisse für den Bereich *niedriger* Stoßenergie gering (s. z. B. Anm. ^{3, 4}).

Dieser Faktor ist für Deuterium 5,2, für Wasserstoff 3,9, wenn man Teilchen gleicher Reichweite betrachtet (vgl. dagegen unten dE/ds !).

Die Frage nach dem Ursprung des Verhältnisses 1 : 2 der *Exponenten* von R führte zwangsläufig auf die folgenden Erörterungen. Die *empirisch gefundenen* Parabeln des differentiellen Energieverlustes überschneiden sich und divergieren nach rechts (vgl. Abb. 2). Damit unvereinbar ist die bekannte Tat-

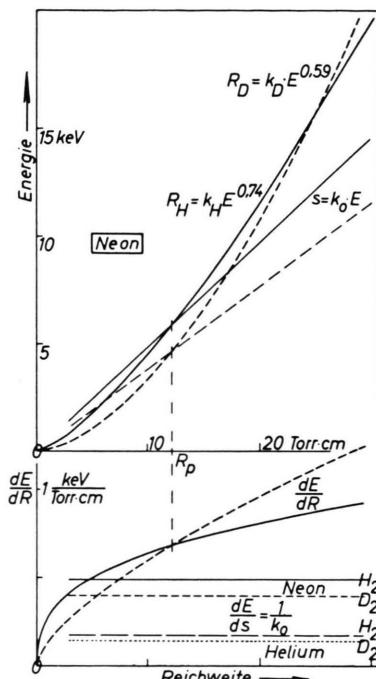


Abb. 2. Die empirisch gefundene Abhängigkeit der Einschußenergie und des differentiellen Energieverlustes von der Reichweite R , schematisiert und nach Null extrapoliert. Die Geraden geben die vermutete Abhängigkeit von der Bahnlänge s wieder. Ne^+ -Ionen in H_2 (—) und in D_2 (---).

sache, daß nach hohen Energien hin dE/dR *gleich* wird für beide Wasserstoffisotope. Da das Überschneiden der Kurven $E(R)$ und ebenso dE/dR , das verschiedene n für H_2 und D_2 also, auf die größere Winkelstreuung beim schweren Isotop zurückgeführt wird, kann man versuchen, auf den „richtigen“ Wert für n bzw. $(1-n)/n$ zu extrapolieren, wie er sich *ohne* Winkelablenkung ergäbe. Die „richtige“ Neigung der Kurven in Abb. 1 muß noch geringer sein als die für H_2 . Daraus folgt für beide Isotope ein nahezu gleicher korrigierter Wert n_0 nahe bei Eins. (Solange n für H_2 und D_2 *verschieden* ist, kommen die unplausiblen Kurvenformen in Abb. 2 vor.)

Demnach lauten die „korrigierten“ Gleichungen:

$$E = s^{1+x}/k_0; \quad dE/ds = s^x/k_0, \quad (3)$$

wo x nahe bei 0 liegen dürfte. (Ohne Winkelstreuung ist $R = s$.) Es ist jetzt annähernd $E \sim s$ und $dE/ds = \text{const}$, unabhängig von der Energie.

Um den Wert von k_0 abschätzen zu können, wurden versuchsweise in dem Schnittpunkt R_p der Kurven dE/dR die Punkte $E(R_p)$ als Punkte der „korrigierten Kurven“ $E(s)$ angenommen. Auf diese Weise ergab sich für $dE/ds = 1/k_0$ bei

Helium der Wert

$$0,172 \text{ (H}_2\text{) bzw. } 0,137 \text{ (D}_2\text{)} \frac{\text{keV}}{\text{Torr} \cdot \text{cm}}$$

und bei Neon $0,485 \text{ (H}_2\text{) bzw. } 0,388 \text{ (D}_2\text{)} \frac{\text{keV}}{\text{Torr} \cdot \text{cm}}$

Der korrigierte differentielle Energieverlust ist hier in beiden Fällen für Deuterium um 20% kleiner als für leichten Wasserstoff (Abb. 2 unten).

Der Quotient der korrigierten differentiellen Energieverluste von Neon und Helium ergibt sich nunmehr zu $2,8_3$, und zwar im Gegensatz zu den empirisch gefundenen (unkorrigierten) Werten für *beide* Wasserstoffisotope *gleich*. Dieser Quotient stimmt überraschend gut überein mit dem (2,92), der sich aus einer theoretischen Abschätzung von BOHR ergibt [s. Gl. (6)], in der dE/dR annähernd konstant und nur abhängig von den Ordnungszahlen ist.

3. Vergleich mit Energie-Reichweite-Beziehungen bei anderen Verfassern

Bei hohen Energien herrscht weitgehend Klarheit über den Wirkungsquerschnitt: es wird – von den Kernstößen abgesehen – praktisch nur Anregungsenergie übertragen, wobei keine Winkelstreuung eintritt, die die Meßwerte verfälscht. (Hier darf man den differentiellen Energieverlust der differentiellen Ionisierung proportional setzen, was dagegen bei niedrigen Stoßenergien sicher falsch ist.)

Bereits vor einigen Jahrzehnten wurde für energiereiche Teilchen empirisch der Zusammenhang $R \sim E^{3/2}$ gefunden. Der bekannte, von BETHE quantenmechanisch errechnete differentielle Energieverlust durch

$$^{16} L_n = \ln \left\{ z_1 z_2 \sqrt{z_1^{2/3} + z_2^{2/3}} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \cdot \mu \left(\frac{v_0}{v} \right)^2 \right\}^{-2}.$$

Der logarithmische Ausdruck L_n , der die Elektronenbremung berücksichtigt, ist identisch mit dem von BETHE angegebenen.

Wechselwirkung mit den Elektronen der Hülle wurde 1948 von BOHR¹ durch einen zusätzlichen Term für den Beitrag des *Kernes* zur Bremsung erweitert¹⁶:

$$\frac{dE}{dR} = \frac{1}{8 \pi \epsilon^2} \frac{z_1^{*2} e^4}{\mu v^2} N L_e + \frac{1}{8 \pi \epsilon^2} \frac{z_1^2 z_2^2 e^4}{m_2 v^2} N L_n. \quad (4)$$

Bei hohen Energien überwiegt der erste Summand ($1/\mu$ gegenüber $1/m_2$); mit abnehmender effektiver Kernladung z^* (und wegen L_n) beginnt er jedoch etwa bei $v_0 = e^2/4 \pi \epsilon_0 \hbar = c/137$ zurückzutreten gegenüber dem zweiten Summanden, was durch die Messungen in¹² recht gut bestätigt wurde.

Die Untersuchungen der Stoßprozesse im Bereich *unterhalb* v_0 sind weniger einheitlich und z. Tl. widersprechend^{2, 13, 17}. Die neueren theoretischen und referierenden Arbeiten (z. B. Anm.^{18, 19}) enthalten im wesentlichen die von BOHR¹ angegebene „halbklassische“ Betrachtungsweise: Durch den Einfluß der elektrostatischen Felder der Stoßpartner ergibt sich eine Wechselwirkung des Geschosses mit dem *Gesamtatom*, die je nach dem Grad der Abschirmung (des Kernfeldes durch die Elektronen) durch einen Quotienten b/a charakterisiert wird [b ist der kleinste Teilchenabstand bei zentralem Stoß, a ist der Abschirm-Parameter zum COULOMB-Potential: $P_a(r) = P_{\text{Coul}}(r) \exp\{-r/a\}$]. Bei praktisch unabgeschirmtem Feld ($b/a \ll 1$) folgt so das „klassische“ RUTHERFORD-Gesetz; der zweite Summand in Gl. (4) gilt dagegen solange $b/a < 1$ ist („abgeschirmter RUTHERFORD-Stoß“), d. i. bis wenig unterhalb v_0 bei Kernspaltprodukten, aber bis zu beträchtlich kleineren Geschwindigkeiten bei leichten Stoßpartnern¹⁸. Hier ergibt sich eine von der Bremssubstanz abhängige Reichweite:

$$R_0 = \frac{2 \pi \epsilon_0^2 m_1 m_2}{N z_1^2 z_2^2 e^4} v^4 \frac{1}{L_n}, \quad \left(\frac{dE}{dR_0} \sim \frac{z_1^2 z_2^2 e^4}{m_2 v^2} \right). \quad (5)$$

Bei stärkerer Abschirmung $b/a > 1$ (die Kraft ist angenehrt proportional zu r^{-3}) ist eine klassische Betrachtung nur bedingt möglich. Für $m_1 \approx m_2$ ergeben sich „Diffusionseffekte“, für $m_1 \gg m_2$ folgt aus

$$\frac{dE}{dR} \approx \pi N \frac{\hbar^2}{\mu} z_1^{2/3} z_2 \quad (6)$$

die Reichweite zu

$$R \approx \frac{1}{2 \pi N a_0^2 z_1^{2/3} z_2} \frac{m_1}{\mu} \left(\frac{v}{v_0} \right)^2 = \frac{\mu T_1}{\pi N \hbar^2 z_1^{2/3} z_2}, \quad (7)$$

¹⁷ I. A. TEPOLOVA, V. S. NIKOLAEV, I. S. DMITRIEV u. L. N. FATEEVA, J. Exp. Theor. Phys., USSR 34, 559 [1958].

¹⁸ F. SEITZ, Disc. Faraday Soc. 5, 271 [1949].

¹⁹ G. J. DIENES u. G. H. VINEYARD, Radiation Effects in Solids, Interscience Publ., New York 1957.

solange „ b/a nicht zu groß“ ist (a_0 ist der Bohrsche Radius $a_0 = 4 \pi \epsilon_0 \hbar^2 / \mu e^2$). Für „ b/a sehr groß gegenüber Eins“ liegt wegen der vollständigen Abschirmung der Felder der Stoß harter Kugeln vor.

Die Wechselwirkung mit dem *Gesamtatom*, die sich nach dieser Theorie in unterschiedlichem Verhalten von Geschossen der Geschwindigkeit unterhalb v_0 äußern müßte, wurde explizit nur andeutungsweise von BOGGILD, ARROE und SIGURGEIRSSON (siehe unten) gefunden, wenn man von KOOPS und MEYER absieht. Implizite (und freilich nicht direkt erkennbar) ist sie in den Energie-Reichweite-Kurven in der Arbeit von COOK et al.¹² und in entsprechenden anderen Arbeiten enthalten; denn wie schon gesagt wurde, ist offenbar der Zusammenhang $R \sim E^{2/3}$ eine Folge der mit der Übertragung von Bewegungsenergie verbundenen Winkelstreuung und mithin der Ausdruck der Wechselwirkung mit dem *Gesamtatom*.

LASSEN² hat im Anschluß an die angegebene Theorie 1949 nach Messungen von dE/dR in leichtem und schwerem Wasserstoff durch Kernbruchstücke sehr hoher Energie (über 50 MeV) Kurven angegeben, die er nach Energien unterhalb von etwa 15 MeV extrapoliert. Dort ergibt sich ein Reichweitenunterschied in Wasserstoff bzw. Deuterium von rund 7 mm in Übereinstimmung mit relativ groben Nebelkammerexperimenten mit Kernbruchstücken von BOGGILD, ARROE und SIGURGEIRSSON³ (1,3 mm Luft \cong 6 mm Wasserstoff). Der Gegensatz zu etwa gleichzeitigen Ionisationskammermessungen von HATFIELD, LOCKENVITZ und YOUNG⁴ – gleiche α -Teilchen-Reichweite in beiden Gasen – wiegt angesichts der relativ großzügigen Meßanordnung nicht schwer, zumal hier die Anfangsenergie der Geschosse bei rund $50 \cdot E_0$ liegt.

Die Meßergebnisse stehen im wesentlichen mit der von BOHR angegebenen Theorie im Einklang. Der *Reichweitenunterschied* gleicher Geschosse in H_2 bzw. D_2 ergab sich bei Geschwindigkeiten unterhalb v_0 im Sinne der Gl. (5), allerdings kleiner als nach (5) und größer als nach (6) zu erwarten war. Die Abhängigkeit des *differentiellen Energieverlustes* von der *Masse* des gestoßenen Teilchens nach (5) wurde qualitativ bestätigt, ebenso seine Abhängigkeit von der Ordnungszahl des stoßenden Teilchens (die aber quantitativ genau von (6) wiedergegeben wird; s. Abschn. 2.3). Die *Geschwindigkeitsabhängigkeit* des *empirischen* differentiellen Energieverlustes nach den vorliegenden Messungen ($\sim v^{2/3}$ nach Abschn. 2.3 und Anm. 12, 17) entspricht weder (5) noch (6), dagegen ist die Übereinstimmung des nach Abschn. 2.3 korrigierten Wertes ($dE/ds \sim v^0$) mit (6) sehr gut.

²⁰ R. RISKALLA u. J. ROSSEL, Helv. Phys. Acta **30**, 488 [1957].

²¹ M. KRAUSS u. A. KROPP, J. Chem. Phys. **26**, 1776 [1957].

²² In einer neueren Arbeit²³ wurden mit großer Genauigkeit Wirkungsquerschnitte bei einigen Hundert eV gemessen. Diese werden nach niedrigen Energien hin so rasch kleiner,

4. Unterschiede der Impulsübertragung auf leichten und schweren Wasserstoff

Für die größere Reichweite und Gesamtionisation in *schwerem* Wasserstoff gegenüber leichtem – wenigstens bei kleinen Energien – sind folgende Erklärungsmöglichkeiten denkbar:

1. Die kleinere an D_2 übertragene kinetische Energie.
2. Die kleinere an D_2 übertragene Schwingungs- und Rotationsenergie, die verschiedene Verfasser erwähnen (z. B. Anm. 20), ohne den Einfluß auf Stoßprozesse zu untersuchen.
3. Die nach KRAUSS und KROPP²¹ kleinere Ionisierungswahrscheinlichkeit (-ausbeute) in D_2 .

Wieweit die beiden letzten Effekte – sie sind nach KRAUSS und KROPP²¹ nicht voneinander unabhängig – ins Gewicht fallen, kann hier nicht entschieden werden. Allgemein wird vorwiegend der erste betrachtet. Wegen irriger Annahmen einiger Autoren soll noch einmal darauf eingegangen werden.

Aus Energie- und Impulssatz ergibt sich allgemein

$$v_1' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \cos \alpha \quad (8a)$$

$$\langle 1 \mp \sqrt{1 - \frac{m_1^2 - m_2^2 + \frac{\varepsilon}{T_1} m_2 (m_1 + m_2)}{m_1^2 \cos^2 \alpha}} \rangle,$$

$$v_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \cos \beta \quad (8b)$$

$$\langle 1 \pm \sqrt{1 - \frac{m_1 + m_2}{m_2} \frac{\varepsilon}{T_1 \cos^2 \beta}} \rangle.$$

Im Falle des elastischen Stoßes harter Kugeln ist $\varepsilon = 0$ und es gelten die oberen Vorzeichen der Wurzel.

Elementar folgt aus den Gln. (8), daß Anregung nur oberhalb der „Einsatzenergie“

$$T_{10} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \cdot \varepsilon$$

möglich ist²²; – denn nur dann ist der Radikand in (8 b) positiv –, und daß aus dem gleichen Grund beim unelastischen Stoß „Grenzwinkel“ existieren, Maximalwerte der Winkel, unter denen die Stoßpartner wegfliegen können. Für das stoßende Teilchen ist nach (8 a)

$$\alpha_{\max} = \arcsin \frac{m_2}{m_1} \sqrt{1 - \frac{T_{10}}{T_1}},$$

daß es nicht möglich war, die Einsatzenergien hinreichend genau zu bestimmen; die theoretischen Werte werden jedoch sowohl der Reihenfolge als auch der Größenordnung nach bestätigt.

²³ D. E. MOE, Phys. Rev. **104**, 694 [1956].

(vgl. Abb. 3) und analog nach (8 b) für das gestoßene Teilchen

$$\beta_{\max} = \arccos \sqrt{T_{10}/T_1},$$

unabhängig von der Masse der Stoßpartner, wenn man die Stoßenergie T_1 in der Einheit T_{10} mißt (Abb. 4).

Die beim *unelastischen* Stoß „erlaubten Winkelbereiche“ verkleinern sich demnach mit abnehmender Bewe-

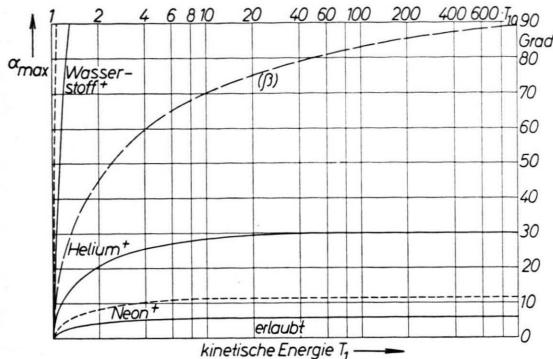


Abb. 3. Der maximale Streuwinkel α_{\max} (stoßendes Teilchen) beim *unelastischen* Stoß in H_2 (—) und D_2 (---) als Funktion der Einschubenergie T_1 (Abszisse relativ, Einheit T_{10}). Die Kurve (β) gilt für $m_1 = m_2$ und ist außerdem gemeinsame Kurve für den maximalen Driftwinkel β_{\max} (gestoßenes Teilchen) bei beliebigen Stoßpartnern.

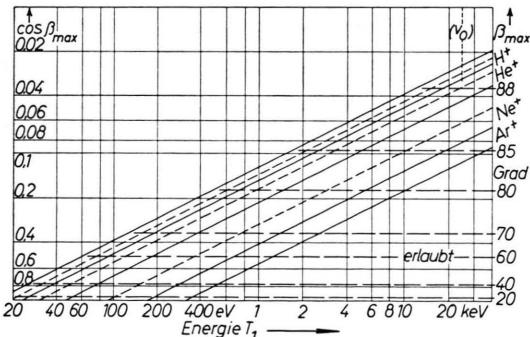


Abb. 4. Der maximale Driftwinkel β_{\max} (gestoßenes Teilchen) beim *unelastischen* Stoß als Funktion der Einschubenergie. Auf der Abszisse lassen sich die theoretischen Einsatzpotentiale T_{10} ablesen. Alle hier eingetragenen Kurven werden mit T_{10} als Abszisseneinheit durch eine Kurve (β in Abb. 3) dargestellt. ($Ne^+ \rightarrow H_2$ und $Ar^+ \rightarrow D_2$ fallen zusammen. —

Die obere Kurve ist die „Grenzkante“ für $m_1/m_2 \rightarrow 0$.)

gungsenergie des stoßenden Teilchens immer rascher (Abb. 3) und werden bei der Einsatzernergie gleich Null. Für den Fall des *elastischen* Stoßes sind dagegen alle Winkel β möglich, ebenso alle Streuwinkel α , solange $m_1 < m_2$ ist; bei anderen Massenverhältnissen $m_1 > m_2$ ist der maximale Streuwinkel $\alpha_{\max} = \arcsin(m_2/m_1)$ (in Abb. 4 die Asymptote für $T_1/T_{10} \rightarrow \infty$). Da man demnach beim Stoß der gleichen — schweren — Teilchen gegen Deuterium (rund zweifach) größere Maximalwinkel erwarten kann als gegen Wasserstoff, läßt sich vermuten, daß die Winkel allgemein bei dem Stoß gegen

das schwere Isotop größer sind, wie es weiter unten bei der Betrachtung des Stoßablaufes nach Bohr bestätigt wird.

Die an das gestoßene Teilchen übertragene kinetische Energie ist nach (8 b)

$$T_2' = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot 2 T_1 \cos^2 \beta \quad (9)$$

$$- \left\{ 1 - \frac{T_{10}}{2 T_1 \cos^2 \beta} \pm \sqrt{1 - \frac{T_{10}}{T_1 \cos^2 \beta}} \right\}.$$

Im Falle des *elastischen* Stoßes — die geschweifte Klammer hat hier den Wert 2 — muß demnach (wegen der kleinen Erfahrungswerte von T_2'/T_1)

$$\cos^2 \beta = \frac{(m_1 + m_2)^2}{4 m_1 m_2} \frac{T_2'}{T_1}$$

im Mittel sehr klein sein, mithin der mittlere Driftwinkel β selbst *nahezu* 90° betragen.

Für den Fall des *unelastischen* Stoßes²⁴ allerdings liegt der Wert der geschweiften Klammer in (9) zwischen 2 und $\frac{1}{2}$; hier wird demnach, verglichen mit dem rein *elastischen* Stoß, bei gleichem β weniger Bewegungsenergie übertragen oder umgekehrt ist bei gleicher Übertragung kinetischer Energie der Driftwinkel β kleiner.

In einigen älteren *Arbeiten*^{6, 7}, in denen der Teilchenstoß *allein* nach Energie- und Impulssatz durchzurechnen versucht wird (z. B. Anm.²⁵), kommen die Verfasser zu dem — unrichtigen — Schluß, daß sich offensichtlich Theorie und Experiment widersprechen. Dies erklärt sich daraus, daß dort der zentrale Stoß ($\cos \beta = 1$) betrachtet wird, bei dem

$$T_2' = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} 4 T_1 \cdot \left(1 - \frac{T_{10}}{2 T_1} \right) \quad (9 \text{ a})$$

ist, also der Energieverlust pro Stoß so beträchtlich, daß das eingeschossene Teilchen schon nach verhältnismäßig wenigen Zusammenstößen seine gesamte Energie abgegeben hätte. Ebenso widerspricht auch die für diesen Stoßprozeß charakteristische Massen-

²⁴ Hier kann (9) wegen des $\cos \beta$ im allgemeinen nicht vereinfacht werden. Für die Wurzel der Klammer $\{1 - \frac{1}{2} D \pm \sqrt{1 - D}\}$ ist eine in $D = \frac{T_{10}}{T_1 \cos^2 \beta} = \left(\frac{\cos \beta_{\max}}{\cos \beta} \right)^2$

ungleichmäßig konvergente Reihenentwicklung möglich:

$$(1 - D)^{1/2} = 1 - \frac{D}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left(\frac{D}{2} \right)^n \prod_{i=2}^n \frac{2i-3}{i} \right\};$$

da deren Koeffizientenfolge gegen Eins strebt, kann man sich nicht ohne weiteres auf wenige Glieder beschränken, solange D die Größenordnung Eins erreichen kann.

²⁵ G. Joos u. H. KULENKAMPFF, Phys. Zeitschr. **25**, 257 [1924].

abhängigkeit in (9 a) – leichte Geschosse müßten in der leichten, schwere Geschosse in der schwereren Bremssubstanz mehr Energie pro Stoß verlieren (Abb. 5) – der Erfahrung (Abschnitt 2.2 und Anmerkungen^{6, 7}). – Auch wenn man bei *nicht* zentralem Stoß (mit der stillschweigenden – unrichtigen – Zusatzannahme gleicher Winkel in beiden Bremssubstanzen) vergleicht, erscheint selbstverständlich diese unrichtige Massenabhängigkeit.

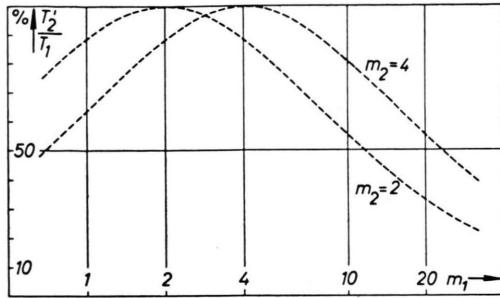


Abb. 5. Der beim zentralen Stoß übertragene Bruchteil der Stoßenergie nach der Theorie bei Anm. ^{6, 7, 25}. Parameter: Masse des gestoßenen Teilchens; Einheit: Masse des Wasserstoffatoms.

Durch *Energie- und Impulssatz allein* ist aber *niemals* der gesamte Stoßablauf festgelegt, so daß sich also im allgemeinen *nicht* die in (9) *explizite* enthaltene Abhängigkeit von den beteiligten Massen bzw. der Stoßenergie ergibt. Es können vielmehr erst durch eine Zusatzannahme die Massen, Geschwindigkeiten und Winkel eindeutig einander zugeordnet werden. Diese Zusatzannahme war z. B. in (9 a) $\cos \beta = 1$. Im folgenden wird umgekehrt durch die *Annahme eines bestimmten Stoßmechanismus* die Rechnung und damit erst β festgelegt.

Wir gehen aus von einer Betrachtung von BOHR¹. Dort ergibt sich die Wechselwirkung der Stoßpartner als Folge ihrer elektrostatischen Abstoßung. Dabei wird das an sich neutrale Teilchen polarisiert (die Schwerpunkte der positiven und negativen Ladungsträger gegeneinander verschoben) und es wirken wegen der Abschirmung relativ kleine Kräfte, die zu r^{τ} mit $\tau > 2$ umgekehrt proportional sind, mithin mit der Entfernung rasch abnehmen, und abhängig sind von den effektiven Kernladungszahlen z_1^*, z_2^* , aber nicht von den Massen der Teilchen.

In *erster Näherung* ist bei relativ großen Geschwindigkeiten $v_1 \gg v_2'$ der an das gestoßene Teilchen übertragene Impuls

$$\mathfrak{P}_2' = \int \mathfrak{R}(\mathbf{r}) dt = \mathfrak{P}_2'(p, z_1^*, z_2^*, t)$$

wie die Kraft explizite unabhängig von m_1 und m_2 , also im Mittel gleich in H_2 und D_2 , da die Verteilung der Stoßparameter p und die effektiven Ladungszahlen für beide Bremssubstanzen gleich sind. Die „Wechselwirkungszeit“²⁶ t_w hängt einerseits von v_1 (in gleicher Weise für H_2 und D_2) ab und andererseits von der Geschwindigkeit v_2' des gestoßenen Teilchens. Die Abhängigkeit der Wechselwirkungszeit von v_2' bedeutet implizit eine Abhängigkeit von m_2 , die als zweite Näherung unten behandelt wird.

In der ersten Näherung ist wegen des hier (für die beiden vorliegenden Bremssubstanzen) gleichen Wertes von \mathfrak{P}_2' die übertragene Bewegungsenergie

$$T_2' = \frac{\mathfrak{P}_2'^2}{2m_2} \sim \frac{1}{m_2} \quad (10)$$

um den Faktor 2 verschieden in H_2 und D_2 . Demnach ergibt sich

$$T_1' = \frac{\mathfrak{P}_1'^2}{2m_1} \left\{ 1 - \frac{m_1}{m_2} \frac{\mathfrak{P}_2'^2}{\mathfrak{P}_1'^2} - \frac{2m_1\varepsilon}{\mathfrak{P}_1'^2} \right\} \quad (11)$$

bzw. unter Vernachlässigung höherer Glieder ($|\mathfrak{P}_2'| \ll |\mathfrak{P}_1'|$):

$$|\mathfrak{P}_1'| = |\mathfrak{P}_1| \left\{ 1 - \frac{m_1}{\mathfrak{P}_1'^2} \left(\frac{\mathfrak{P}_2'^2}{2m_2} + \varepsilon \right) \right\} \quad (12)$$

$$= |\mathfrak{P}_1| \left\{ 1 - \frac{T_2' + \varepsilon}{2T_1} \right\}.$$

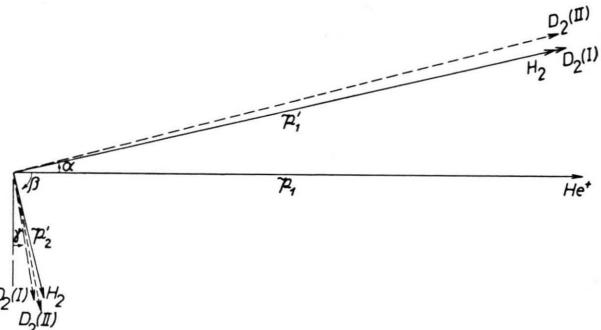


Abb. 6. Impulsdigramm für den Stoß von He^+ -Ionen gegen H_2 (—) und D_2 (---); $(T_2'/T_1)_{H_2} \approx 1/1000$; bei $\varepsilon=0$; der Deutlichkeit halber verzerrt (\mathfrak{P}_2' etwa zehnfach vergrößert). I erste Näherung, II zweite Näherung.

Die geschweifte Klammer ist nur wenig von Eins verschieden, dabei aber – soweit Impuls übertragen wird – für die schwerere Bremssubstanz etwas größer (Abb. 6). Wie man weiter dem Impulsdigramm entnimmt, bedeutet dies praktisch gleiche Streuwinkel.

²⁶ Etwa zu definieren als $t_w = \frac{\int \mathfrak{R}(\mathbf{r}) dt}{|\mathfrak{R}(p)|}$ mit $p = \text{Stoßparameter}$.

kel α , aber verschiedene Driftwinkel β in Wasserstoff und Deuterium.

Durch Kombinieren der „grundsätzlichen“ Gl. (9) mit der speziell für den hier betrachteten Stoßprozeß gültigen Gl. (10) erhält man für den Driftwinkel²⁷ β im Falle des elastischen Stoßes den recht übersichtlichen Zusammenhang

$$\cos \beta = \frac{|\mathfrak{P}_2'|}{|\mathfrak{P}_1|} \frac{m_1 + m_2}{2 m_2} = \sin \gamma, \quad (13)$$

(γ ist der zu β gehörige Komplementwinkel).

Demnach sind hier (für alle Geschosse in gleicher Weise) bei praktisch gleichen Streuwinkeln die Driftwinkel in D_2 größer als in H_2 (s. Anm.²⁸). Natürlich ist γ zu $|\mathfrak{P}_2'|/|\mathfrak{P}_1|$ proportional. Im Grenzfall $\gamma = 0$ wird keine Bewegungsenergie mehr übertragen.

Bei gleichzeitiger Übertragung von Anregungsenergie [siehe Gl. (11), (12)] wird das Verhältnis der an H_2/D_2 übertragenen Energien ($T_2' + \varepsilon$) kleiner als 2, der Winkel γ wird größer, der relative Unterschied von γ somit kleiner, α bleibt nahezu unverändert.

Die Abhängigkeit von der Geschossgeschwindigkeit ergibt sich aus der Überlegung, daß die Wechselwirkungszeit und damit \mathfrak{P}_2' proportional $1/v_1$ und demnach $T_2' \sim 1/m_2 v_1^2$ ist [vgl. Gl. (5)]. An der Massenabhängigkeit ändert sich dadurch natürlich nichts.

Zieht man in der zweiten Näherung die Bewegung des gestoßenen Teilchens mit in Betracht, so ist – gleiche Anfangsbedingungen vorausgesetzt – wegen der kleineren Geschwindigkeit v_2' des schwereren Isotops der mittlere Abstand während des Stoßprozesses bei D_2 geringer als bei H_2 , demnach die Kraft $|\mathfrak{F}|$ und damit $|\mathfrak{P}_2'(m_2)|$ größer. Das bedeutet aber, daß (bei gleichen Geschossen) T_2' weniger stark von m_2 abhängt als in (10), so daß sich der differentielle Energieverlust im schweren und leichten Wasserstoff (auch bereits ohne Übertragung von Anregungsenergie) um weniger als den Faktor 2 unterscheidet. Der aus den Versuchsergebnissen geschlossene kleinere Wert (rund $\frac{5}{4}$; vgl. Abb. 2) kann also entweder dem nivellierenden Einfluß der nichtelastisch umgesetzten Energie ε oder dem hier als zweite Näherung beschriebenen verschiedenen Ausweichen des gestoßenen Teilchens zugeschrieben werden. Vermutlich spielt beides eine Rolle.

²⁷ Analog findet man aus den entsprechenden Gleichungen für T_1 einen geschlossenen aber unübersichtlichen Ausdruck für α .

Aus der beim schwereren Isotop größeren Impulsübertragung folgt (Abb. 6), daß der Streuwinkel α in D_2 größer ist als in H_2 , wie es bereits aus den Versuchsergebnissen (Abschnitt 2.3) geschlossen wurde.

5. Zusammenfassung

Durch die hier entwickelte Anschauung werden Größenordnung und Massenabhängigkeit der übertragenen Bewegungsenergie zutreffend beschrieben. Es wird stets an das schwerere Isotop weniger kinetische Energie übertragen, so daß dort die Bahnlänge des stoßenden Teilchens entsprechend größer wird und für die übrigen Prozesse mehr Energie zur Verfügung stehen muß (z. B. Ionisation, wie es für den Beschuß durch H^+ , D^+ (s. Anm.⁶), He^+ und Ne^+ (s. Anm.⁷) gefunden wurde).

Mit der aus der Theorie folgenden Abhängigkeit der Streuwinkel von der Masse der (isotopen) Bremssubstanz stimmt der aus dem Experiment geschlossene Einfluß der Winkelstreuung qualitativ überein: wegen größerer Streuwinkel in Deuterium (gegenüber Wasserstoff) muß auch die durch die Bahnablenkung der Geschosse verursachte „Reichweitenverfälschung“ im schweren Isotop größer sein, und zwar zunehmend mit der Anfangsenergie der Geschosse (soweit Impuls übertragen wird) wegen der dann größeren Gesamtzahl der kumulierend wirkenden Stöße. Das entspricht genau dem experimentellen Befund bei den Edelgasionen: bei größeren Anfangsgeschwindigkeiten ist – umgekehrt wie bei kleinen – die Reichweite im schweren Wasserstoff geringer als im leichten.

Herrn Prof. Dr. W. HANLE bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit und ihre Förderung zu großem Dank verpflichtet, ebenso Herrn Professor Dr. W. DÖRING, Herrn Dr. A. SCHARMANN, Herrn Dr. G. A. VOSS für wertvolle Diskussionen, Herrn Professor Dr. E. SAUR und Herrn Dr. PUPP für Ratschläge und Hinweise und Herrn Dipl.-Phys. H. LÖB für die Unterstützung bei den Messungen. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft, den Firmen Pfeiffer (Wetzlar), Röchling-Buderus (Wetzlar) und Telefunken (Ulm) danke ich für materielle Unterstützung.

²⁸ Numerische Werte eines Beispiels: $He \rightarrow H_2/D_2$ unter der Annahme $(T_2'/T_1)_{H_2} = 1/1000$ nach (13) ist $\gamma \approx 1^\circ 55'$ bzw. $1^\circ 16'$.